数理解析研究所講究録
608巻 1987年 47-69



# Artin-Schreier-Witt 理論の変形
## —— u-calculus の視点から ——

筑波大数学系 竹内光弘
(Mitsuhiro Takeuchi)

| | 群 | Lie 環 |
|---|---|---|
| algebra A の | units U(A) | A , xy - yx |
| | Aut (A) | Der (A) |
| 代数群 G の | rational points | Lie algebra |
| ホップ代数 H の | group-like elements | primitive elements |

この表の左右の対応する概念はそれぞれ乗法と加法から，ある共通の手続きで統一的に得られる．乗法と加法の中間的概念として，基礎環の元 $u$ に対する $u$-乗法を導入し，その手続きを $u$-乗法に対し適用して得られる概念とその若干の応用を論ずる．

可換環 $R$ 上で考える．

加法と乗法を <u>formal semigroup</u> として捉える．

文字 $X, Y$ の words ( $XY, YXY, XYYX, \emptyset$ など ) のすべての $R$-線形結合の全体 $R\langle X, Y\rangle$ は $R$-algebra の構造をもつ. その元としての

$$\text{加法 } F_a(X, Y) = X + Y, \ \text{乗法 } F_m(X, Y) = XY$$

は次のいみで formal semigroup である.

<u>Def</u> $F(X, Y) \in R\langle X, Y\rangle$ が formal semigroup であるとは

(i) $F(F(X, Y), Z) = F(X, F(Y, Z))$ in $R\langle X, Y, Z\rangle$,

(ii) $\exists\, e_F \in R$ with $F(X, e_F) = X = F(e_F, X)$.

<u>Thm</u> $R$ が reduced ならば, $e_F = 0$ なる formal semigroup は次のものに限る:

$$F_{a,b}(X, Y) = X + Y + aXY + bYX,$$

ここで $a, b \in R$ with $ab = 0$.

<u>Cor</u> $R$ が整域ならば, $e_F = 0$ なる formal semigroup は

$$F_u(X, Y) = X + Y + uXY \quad (u \in R)$$

及びその opposite に限る.

以下では，このタイプの formal semigroup を考察の対象とする．$F_u$ は加法 $F_a$ と乗法 $F_m$ の間の deformation と考えられる．$u=0$ のとき $F_0 = F_a$，$u=1$ のとき $X \mapsto 1+X$ により $F_1 \cong F_m$ である．$\varphi_u(X) = 1+uX$ は formal semigroup map

$$\varphi_u : F_u \longrightarrow F_m$$

を与える．即ち，$\varphi_u(F_u(X,Y)) = F_m(\varphi_u(X), \varphi_u(Y))$，$\varphi_u(0) = 1$ が成立つ．

$F_u$ はすべての R-algebra の上に，0 を単位元とする半群の構造を定義する．A を任意の R-algebra とする．

<u>Lem</u>　$a \in A$ が $F_u$-product に関して unit（このとき $a$ を <u>u-unit</u> とよぶ）$\Longleftrightarrow$ $\varphi_u(a) = 1+ua$ が unit．この時 $a$ の $F_u$-inverse は $a^* = -a\varphi_u(a)^{-1}$ である．

A の u-units の群を $G_u(A)$ とする．R-algebra に群を対応させる関手 $G_u$ は加法群 $G_a$ と乗法群 $G_m$ の間の deformation を与えている：$G_0 = G_a$，$G_1 \cong G_m$．

$G_u$ は faithfully flat R-algebra

$$H_u = R[X, \varphi_u(X)^{-1}]$$

で represent されている. 即ち, $G_u(A) \cong Alg_R(H_u, A)$.

## u-derivation と u-automorphism

R-linear map $f : A \longrightarrow A$ が
algebra map とは, $f(ab) = f(a)f(b)$, $f(1) = 1$,
derivation とは, $f(ab) = af(b) + f(a)b$, $f(1) = 0$
のことである $(a, b \in A)$.

$F_u$ に対応して次の中間的な概念が得られる.

<u>Def</u> $u \in R$ に対し, R-linear map $f : A \to A$ が
u-derivation とは

$$f(ab) = af(b) + f(a)b + uf(a)f(b), \quad f(1) = 0$$
$$(a, b \in A)$$

が成立つことと定める.

通常の derivation とは 0-derivation の事であり, $f$ が
1-derivation とは $1 + f$ が $A$ の algebra endomorphism と
いう事である. $A$ の u-derivation の全体を $Der_u(A)$ とする.

<u>Prop</u> $Der_u(A) \subset End_R(A)$ は $F_u$-product で閉じている.

Aの u-derivation $f$ が $End_R(A)$ で u-unit である事は $\varphi_u(f) = 1 + uf$ が algebra A の automorphism である事と同値である. このとき $f$ を A の <u>u-automorphism</u> とよぶ. $f$ の $F_u$-inverse もまた u-derivation になる. 従って A の u-automorphism の全体を $Aut_u(A)$ とおけば,

<u>Prop</u> $Aut_u(A)$ は $G_u(End_R(A))$ の部分群をなす.

$Aut_0(A) = Der_0(A) = Der(A)$ であり, $f \longleftrightarrow 1+f$ は群の同形 $Aut_1(A) \cong Aut(A)$ を与える.

<u>u-primitive elements</u>

H を R 上のホップ代数とする. その coalgebra structure を $\Delta : H \longrightarrow H \otimes H$ 及び $\varepsilon : H \longrightarrow R$ であらわし, antipode を $S : H \longrightarrow H$ であらわそう. H の元 $x$ が primitive であるとは, $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ , $\varepsilon(x) = 0$ が成立つ事である. このとき $S(x) = -x$ であり, H の primitive elements の全体 $P(H)$ は $[x, y] = xy - yx$ に関して H の Lie subalgebra をなし, 更に R が標数 $p$ なら $x \mapsto x^p$ でも閉じている. 一方 H の元 $x$ が group-like であるとは, $\Delta(x) = x \otimes x$ , $\varepsilon(x) = 1$ が成立つ事である. このとき $S(x) = x^{-1}$ であり, H の

group-like elements の全体 $G(H)$ は $H$ の units $U(H)$ の subgroup をなす. formal semigroups $F_a$, $F_m$ を用いて

$x \in H$ が

primitive $\Longleftrightarrow \Delta(x) = F_a(x \otimes 1, 1 \otimes x)$, $\varepsilon(x) = 0$,

group-like $\Longleftrightarrow \Delta(x) = F_m(x \otimes 1, 1 \otimes x)$, $\varepsilon(x) = 1$

と rephrase できるから, 今考えている $F_u$ $(u \in R)$ に関して次の定義を導入するのは自然である.

<u>Def</u> $H$ の元 $x$ が <u>u-primitive</u> とは

$$\Delta(x) = F_u(x \otimes 1, 1 \otimes x), \quad \varepsilon(x) = 0$$

が成立つ事と定める. $H$ の u-primitive elements の全体を $P_u(H)$ とおく.

$P_0(H) = P(H)$, $P_1(H) = \{ g - 1 \mid g \in G(H) \}$ である. $x$ が u-primitive なら $\varphi_u(x)$ は group-like ゆえ可逆. 従って u-primitive elements は u-units である.

<u>Prop</u> ホップ代数 $H$ に対し, $P_u(H)$ は $G_u(H)$ の subgroup をなす.

群関手$G_u$をrepresentするR-algebra $H_u = R[X, \varphi_u(X)^{-1}]$ は，Xをu-primitiveとするHopf代数の構造をもつ．実際 $\Delta : H_u \longrightarrow H_u \otimes H_u$ は $\Delta(X) = F_u(X \otimes 1, 1 \otimes X)$ なるunique algebra mapであり，$\varepsilon$, $S$も同様に定義される．このホップ代数$H_u$は$G_u$を可換なR-algebraの圏に制限して得られる群関手をrepresentしている．即ち

$$G_u|_{\text{com.alg.}} = Sp_R\, H_u \quad (H_u \text{のアフィン} R\text{-群スキーム}).$$

とくに $H_0 = R[X]$, $X$ primitive ; $H_1 = R[X, (1+X)^{-1}]$, $1+X$ group-like．$H_1$は群環$R[\mathbb{Z}]$と同形である．

## $\{G_u(A)\}_{u \in R}$ の構造

R-algebra A とホップ代数Hに対する Der(A)及び P(H)は $[x, y] = xy - yx$ （さらにRが標数pなら $x^p$）で閉じている．個々の$u \in R$でなく，uがRの元を走るfamily $\{G_u(A)\}$, $\{P_u(H)\}$を考えると類似の構造をもつことが分る．

<u>Prop</u> R-algebra A に対し，群の族 $\{G_u(A)\}_{u \in R}$ は次のoperationsをもっている：

(i) スカラー乗法. $u, v \in R$ に対し

$$G_{uv}(A) \longrightarrow G_u(A),\ a \longmapsto va$$

は group hom. である.

(ii) $u,v$-bracket. $u, v \in R$ に対し
$a \in G_u(A)$, $b \in G_v(A)$ ならば $[a,b]_{u,v} \stackrel{\text{def}}{=} (ab-ba)\varphi_u(a)^{-1}\varphi_v(b)^{-1}$
は $A$ の $uv$-unit である. その $F_{uv}$-inverse は $[b,a]_{v,u}$
である. $\varphi_{uv}([a,b]_{u,v}) = \varphi_u(a)\varphi_v(b)\varphi_u(a)^{-1}\varphi_v(b)^{-1}$ が
成立つ.

(iii) $R$ が標数 $p$ (素数) ならば, $a \in G_u(A)$ に対し $a^p \in G_{u^p}(A)$ である.

とくに $G_0(A)$ は (i) 〜 (iii) の構造で閉じている. それが $A$ の ($p$-) Lie 構造というわけである.

例 ($u,v$-bracket の)

$[a,b]_{0,0} = ab - ba$.

$[\ ,\ ]_{1,1}$ は群 $G_1(A)$ の commutator.

$[\ ,\ ]_{1,0}$ は inner action と関係する. 即ち,
$a \in G_u(A)$ に対し

$$id_A + [a,-]_{1,0} = inn(1+a) \quad (1+a \text{ の inner 作用}),$$

とくに $[a,-]_{1,0}$ は 1-automorphism である.

(i) ～ (iii) の構造をもつ群の族 $\{G_u(A)\}_{u\in R}$ は，勿論その構造の間に何らかの関係を満たしているであろう．今その関係をすべて明らかにすることはできないが，とりあえず，この族 $\{G_u(A)\}$ を <u>Lie family of groups</u> （標数 $p$ のときは <u>$p$-Lie family</u> ....）とよぶことにしよう．

<u>Prop</u> (a) R-algebra $A$ に対し，$\{Aut_u(A)\}_{u\in R}$ は ($p$-) Lie family $\{G_u(End_R(A))\}_{u\in R}$ の subfamily である．即ち (i) ～ (iii) の operations に関して閉じている．

(b) $R$ 上のホップ代数 $H$ に対し，$\{P_u(H)\}_{u\in R}$ は ($p$-) Lie family $\{G_u(H)\}_{u\in R}$ の subfamily である．

(i) ～ (iii) の operations と可換な group hom. の family として ($p$-Lie) family of groups の hom. が定義される．その例は次に述べる inner $u$-automorphism である．

<u>Prop</u> R-algebra $A$ に対し

(a) $a \in G_u(A)$ ならば $inn_u(a) \overset{def}{=} [a,-]_{u,0}$ は $A$ の $u$-automorphism である．(<u>inner $u$-automorphism</u> とよぶ)．$\varphi_u(inn_u(a))$ は $\varphi_u(a)$ による通常の inner action である．

(b) $inn_u : G_u(A) \longrightarrow Aut_u(A)$ は group hom.

(c) $\mathrm{Im}(\mathrm{inn}_u)$ は $\mathrm{Aut}_u(A)$ の normal subgroup*. (その商群 $\overline{\mathrm{Aut}_u}(A)$ を <u>outer u-aut.</u> の群とよぶ).

(d) $\{\mathrm{inn}_u\}_{u\in R} : \{G_u(A)\}_{u\in R} \longrightarrow \{\mathrm{Aut}_u(A)\}_{u\in R}$ は (p-) Lie family の hom. である.

(e) $\{\mathrm{Aut}_u(A)\}_{u\in R}$ の (p-) Lie structure は $\{\overline{\mathrm{Aut}_u}(A)\}_{u\in R}$ 上の (p-) Lie structure を引起す. 即ち $\{\overline{\mathrm{Aut}_u}(A)\}$ は $\{\mathrm{Aut}_u(A)\}$ の quotient (p-) Lie family である.

所で, R-algebra $H_u$ は群関手 $G_u$ を represent しているのだから, $\{G_u\}_{u\in R}$ 上の (p-) Lie structure に対応する構造を $\{H_u\}_{u\in R}$ はもつ筈である. とくに R-algebra A が可換 (で R が標数 p) ならば (iii) の operation $a \mapsto a^p$, $G_u(A) \longrightarrow G_{u^p}(A)$ はアーベル群の hom. である. 対応するホップ代数の map

$$H_{u^p} \longrightarrow H_u$$

は, $H_{u^p}$ の canonic な生成元を, $H_u$ の canonic な生成元の p 乗に対応させる写像である. これを <u>u-Frobenius map</u> とよぶ.

---

* $F_u(f, \mathrm{inn}_u a, f^*) = \mathrm{inn}_u\, \varphi_u(f)(a)$, $a \in G_u(A)$, $f \in \mathrm{Aut}_u(A)$.

Crossed products

群$\Gamma$が環$S$に(左から)環の自己同形として作用しているとき，$\Gamma$をbaseとする左$S$-自由加群$S*\Gamma$に

$$(a*\gamma)(b*\delta) = a\cdot\gamma(b)*\gamma\delta$$

$(a, b \in S,\ \gamma, \delta \in \Gamma)$なる環の構造が入る. これを$S$と$\Gamma$のcrossed productとよぶ. 同様に，$R$上の$(p\text{-})$Lie環$L$から，R-algebra $A$に対する$\mathrm{Der}(A)$への$(p\text{-})$Lie mapが与えられていれば，$A\otimes U(L)$，ここで$U(L)$は$L$の$\underbrace{}_{\text{universal}}$enveloping algebra，はR-algebraの構造をもつ. これらのcrossed productsにおいて，元(もと)の作用はinner化されている. 即ち$S*\Gamma$においては

$$(1*\gamma)(a*1)(1*\gamma^{-1}) = \gamma(a)*1$$

が，$A\otimes U(L)$においては

$$[1\otimes x,\ a\otimes 1] = x(a)\otimes 1 \quad (x\in L,\ a\in A)$$

がそれぞれ成立つ. 群やLie環のalgebraへの作用はホップ代数の作用として統一的に説明され，上に述べたcrossed productsはalgebraとそれに左から作用するホップ代数とのsmash productsの特別な場合である.

R-algebra $A$のu-automorphism $f$を与えると，この$f$に関係して$A\otimes H_u$は

$$Xa = aX + f(a) + uf(a)X \quad , \ a \in A$$

を満たす $R$-algebra の構造(但し $X$ は $H_u$ の canonic な生成元)をただ一つもつ. もちろんここで $A$ と $H_u$ はその subalgebra とみている. これを $A *_f H_u$ とかき, $A$ と $H_u$ の $f$ に関する crossed product とよぶ. ホップ代数の用語でいえば $X$ の作用が $f$ であるような, ホップ代数 $H_u$ の $A$ への左からの作用がただ一つ存在し, この作用に関する smash product $A \# H_u$ が $A *_f H_u$ である. 上の式は

$$f = \mathrm{inn}_u X|_A$$

と読める. つまり $A$ の $u$-aut. $f$ は $A *_f H_u$ における inner $u$-aut. $\mathrm{inn}_u X$ の $A$ への制限である. $u = 0$ のとき, つまり $f \in \mathrm{Der}(A)$ のとき, $A *_f H_0 = A[X; f]$ はいわゆる, $f$ に関する Ore extension であり, $u = 1$ のときは, $A$ の自己同形 $1+f$ に関する $\mathbb{Z}$ の $A$ への作用についての $A *_{1+f} \mathbb{Z}$ が $A *_f H_1$ である.

アーベル拡大の群

有限群 $\Gamma$ に対し, 可換環 $R$ の $\Gamma$-ガロア拡大 とは, 可換忠実有限生成射影的 $R$-algebra $S$ と, $R$-algebra の同形

$$S * \Gamma \ (\text{crossed product}) \cong \mathrm{End}_R(S)$$

を引起す group hom. $\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}_R(S)$ からなる pair $(S, \alpha)$ のことと定めよう. ($R, S$ の可換性を仮定しないこともできる). その同形類の全体を $\mathrm{Gal}(R, \Gamma)$ と記すことにする. $R$ が体 $k$ のときは, $\Pi$ を $k$ の分離閉包 $k_s$ の $k$ 上の位相ガロア群とするとき, $\Pi$ を $\Gamma$ に自明に作用させれば

$$\mathrm{Gal}(k, \Gamma) \cong H^1(\Pi, \Gamma) \left(= \mathrm{Hom}_c(\Pi, \Gamma)/\Gamma\text{-inn}\right)$$

なる同一視が成立つ. つまり $\Pi$ から discrete 群 $\Gamma$ への連続準同形全体を, $\Gamma$ の元による共役で類別した集合と, $k$ の $\Gamma$-ガロア拡大の同形類の集合の間に, 自然な 1:1 対応がある. 一般の可換環 $R$ に対しては, $\Pi$ に相当する群がちょっと考えられないので, その代りに $\mathrm{Gal}(R, \Gamma)$ を用いると考えてよい.

とくに $\Gamma$ を可換とすると $\mathrm{Gal}(R, \Gamma)$ は群の構造をもつ. $R$ の2つの $\Gamma$-ガロア拡大 $(S_i, \alpha_i)$, $i = 1, 2$, に対し

$$S = \{ x \in S_1 \otimes S_2 \mid I_1 \otimes \alpha_2 = \alpha_1 \otimes I_2 \ \text{ on } x \}$$

とおき, その上で $\alpha = I_1 \otimes \alpha_2 = \alpha_1 \otimes I_2$ とおけば, $(S, \alpha)$ は $R$ の $\Gamma$-ガロア拡大になる. $(S, \alpha)$ の類を $(S_i, \alpha_i)$ の類の積と定める事により $\mathrm{Gal}(R, \Gamma)$ はアーベル群をなす.

単位元は，$|\Gamma|$ ケの $R$ の直積 $Map(\Gamma, R)$ に，$(\gamma f)(\gamma') = f(\gamma'\gamma)$，$f \in Map(\Gamma, R)$，$\gamma, \gamma' \in \Gamma$ で $\Gamma$ を作用させてえられる拡大の類であり，逆元は $\gamma \longmapsto \gamma^{-1}$ を通して作用させたものの類である．$R$ を体 $k$ とすれば，有限 $p$-ーベル群 $\Gamma$ に対し

$$Gal(k, \Gamma) \cong H^1(\Pi, \Gamma) = Hom_c(\Pi, \Gamma)$$

はアーベル群の同形となる．

有限群 $\Gamma$ の代りに flat affine group $G = Sp_R H$（$H$ は $R$ 上 flat な可換ホップ代数）を用いて，$R$ の $G$-ガロア拡大 $(S, \alpha)$ を定義する事ができる．ここで $S$ は忠実平坦可換 $R$-algebra，$\alpha : G \longrightarrow Aut_R(S)$ は $R$-群関手の hom.，但し $Aut_R(S)$ は任意の可換 $R$-algebra $T$ に $Aut_T(T \otimes S)$ を対応させる群関手をあらわすものとする．さらに，前の $S * \Gamma \cong End_R(S)$ に相当する

$$\beta : S \otimes S \cong S \otimes H$$

を満たすと仮定する．$\beta$ は，$G$ の $S$ への作用 $\alpha$ を $R$-algebra map $\rho : S \longrightarrow S \otimes H$（これを構造として，$S$ は右 $H$ comodule algebra である）と同一視し，$\rho$ を左 $S$-linear に拡張したものである．

RのG-ガロア拡大$(S,\alpha)$の同形類の全体を$Gal(R,G)$と記すことにしよう. 前に述べた$Gal(R,\Gamma)$は, constant R-group $\Gamma_R$に対する$Gal(R,\Gamma_R)$に他ならない. 体$k$に対しては, 位相群$\Pi$がdiscrete群$G(k_s)$に連続に作用するが, $k$ perfect or $G$ algebraic smooth 等の条件の下で$Gal(k,G)$はガロア・コホモロジー$H^1(\Pi, G(k_s))$と同一視される[1, III, §5, 3.5, 3.6]. また$G$が可換(つまり$H$がcocommutative)ならば$Gal(R,G)$は群構造をもつ.

さて加法群$G_a$と乗法群$G_m$に対しては

$$Gal(R, G_a) = 0, \quad Gal(R, G_m) = Pic(R)$$

が知られている[1, III, §4, 6.6, 4.4]. $u \in R$に対する$G_u$については次の表示を得る:

<u>Thm</u> $Gal(R, G_u) \cong Pic_u(R)$.

ここで$u$-Picard群$Pic_u(R)$は$M \in Pic(R)$と$R/uR$-加群の同形$\theta : R/uR \cong M/uM$の対$(M,\theta)$の同形類の全体が積$(M_1,\theta_1)\cdot(M_2,\theta_2) = (M_1 \otimes M_2, \theta_1 \otimes \theta_2)$に関してなすアーベル群をあらわす. 明らかに$Pic_0(R) = 0$, $Pic_1(R) = Pic(R)$である.

$G = Sp_R H$ に対し R の G-ガロア拡大 $(S, \alpha)$ を，$\alpha$ を右 H comodule algebra の構造 $\rho: S \longrightarrow S \otimes H$ と同一視して，$(S, \rho)$ のことばで表現できる事を前に述べた．その観点によれば，可換性の仮定は全く不要になるから，一般の R 上のホップ代数 H と R-algebra A に対し，A の H-ガロア拡大 $(B, \rho)$ を考える事ができる．$\rho: B \rightarrow B \otimes H$ は右 H comodule 構造である algebra map，

$$A = \{ b \in B \mid \rho(b) = b \otimes 1 \}$$

とし，$\rho$ の引起す左 B-linear map は同形と仮定する：

$$\beta : B \underset{A}{\otimes} B \xrightarrow{\cong} B \otimes H$$

（さらに，$B_A$ 又は ${}_AB$ の忠実平坦を仮定した方がより理論が得られる事もある）．H が R 上有限生成射影的な場合の基礎理論は [2] に述べられている．このとき $B_A$ と ${}_AB$ は上の条件から有限生成射影的になる．

このような H-ガロア拡大の中で，通常のガロア拡大の normal base の存在に相当する条件をみたす拡大は <u>cleft</u> 拡大と言われる [3]．たとえば $H = R[\Gamma]$ を群環のホップ代数とするとき，A の $R[\Gamma]$-ガロア拡大とは $\Gamma$-graded R-algebra $B = \bigoplus_{\sigma \in \Gamma} B_\sigma$ s.t. $B_\sigma B_\tau = B_{\sigma\tau}$，$B_1 = A$ の事

で，これが cleft とは各 $\sigma \in \Gamma$ に対し $B_\sigma$ が unit をふくむこと，つまり B が Passman [4] のいみで crossed product $A * \Gamma$ をなすことである.

R-algebra A の H-cleft 拡大 B の $(A, H)$-同形類の全体を $\mathrm{Cleft}(A, H)$ と書いてみよう. [3, Thm. 11, p. 815] に述べられているように，ある cohom. description ができる.

<u>Thm</u> $u \in R$ に対し $\mathrm{Cleft}(A, H_u) \cong \overline{\mathrm{Aut}}_u(A)$.

つまり A の cleft $H_u$-拡大の同形類は，A の outer u-aut. と 1:1 に対応する. $f \in \mathrm{Aut}_u(A)$ に対応する A の cleft $H_u$-拡大は，前に述べた crossed product $A \underset{f}{*} H_u$ である. これは $H_u$ の coalgebra 構造から来る自然な $H_u$-comodule 構造をもつ. $f, g \in \mathrm{Aut}_u(A)$ に対し

$$f \equiv g \mod \mathrm{Inn}_u(A) \iff A \underset{f}{*} H_u \underset{(A, H_u)}{\cong} A \underset{g}{*} H_u$$

である事，及び $A \underset{f}{*} H_u$ たちがすべての cleft $H_u$ 拡大を尽す事が定理の内容である.

ここで，有限アーベル群 $\Gamma$ に対する群 $\mathrm{Gal}(R, \Gamma)$ に戻ろう. とくに巡回群 $\mathbb{Z}/(m)$ に対し

$$\mathrm{Gal}(R, m) = \mathrm{Gal}(R, \mathbb{Z}/(m))$$

（$R$ の $m$ 次巡回拡大のなす群）

を考える．以下最後まで，$R$ は素標数 $p$ をもつとする．$m = p^n$ に対する $\mathrm{Gal}(R, p^n)$ は次のように表示される：

<u>Thm</u>（Artin-Schreier-Witt）$R$ が標数 $p$ ならば

$$W_n(R) \xrightarrow{F-I} W_n(R) \longrightarrow \mathrm{Gal}(R, p^n) \longrightarrow 0$$

なる完全列がある．

ここで $W_n$ は長さ $n$ の Witt ベクトルの群，$F$ は Frobenius map, $F(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = (a_0^p, a_1^p, \cdots, a_{n-1}^p)$ を示す．通常は $R$ を体 $k$ とし，$\mathrm{Gal}(k, p^n)$ を $\mathrm{Hom}_c(\Pi, \mathbb{Z}/(p^n))$ とした時の完全列が popular である [5, X, §3 a), p.163]．

$u \in R$ に対し，$\mathrm{Gal}_u(R, p^n)$ を次のように定めよう．その元は，次の pair $(S, d)$ の同形類である：$S$ は可換 $R$-algebra で $R$-progenerator, $d \in \mathrm{Der}_u(S)$, $d^{p^n} = 0$（従って $d$ は $u$-aut.），$\{1, d, \cdots, d^{p^n-1}\}$ は $\mathrm{End}_R(S)$ の左 $S$-free base. $\mathrm{Gal}_u(R, p^n)$ は アーベル群 $\Gamma$ に対する $\mathrm{Gal}(R, \Gamma)$ と同様の群構造をもつ．$u = 1$ に対し $\mathrm{Gal}_1(R, p^n)$ は $\mathrm{Gal}(R, p^n)$ と自然に同形である．

$Gal_u(R, p^n)$ に対し, Artin-Schreier-Witt と類似の表示は得られないだろうか？ 中島[6]は小さい$n$に対し部分的にその向に答えている.

$$u^{p-1} : W_n(R) \longrightarrow W_n(R)$$

を $(u^{p-1}, 0, \cdots, 0)$ とのWitt乗法, つまり $u^{p-1}(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = (u^{p-1}a_0, u^{p^2-p}a_1, \cdots, u^{p^n-p^{n-1}}a_{n-1})$ とする. 長さ$n$のWittベクトル $\underline{X} = (X_0, X_1, \cdots, X_{n-1})$, $\underline{Y} = (Y_0, Y_1, \cdots, Y_{n-1})$ の和を

$$\underline{X} + \underline{Y} = (S_0, S_1, \cdots, S_{n-1}), \quad S_i = S_i(\underline{X}, \underline{Y})$$

とする. $S_0 = X_0 + Y_0$, $S_1 = X_1 + Y_1 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} X_0^i Y_0^{p-i}$ である. $\underline{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in W_n(R)$ に対し, 多項式環 $R[\underline{X}] = R[X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}]$ の次の relation

$$F(\underline{X}) = u^{p-1}\underline{X} + \underline{a}$$

による quotient algebra を $S_{\underline{a}}$ であらわそう. すなわち

$$S_{\underline{a}} = R[\underline{X}] / (X_i^p - S_i(u^{p-1}\underline{X}, \underline{a}), \ i = 0, \cdots, n-1)$$

もっと具体的には

$$X_0^p = u^{p-1}X_0 + a_0,$$

$$X_1^p = u^{p^2-p}X_1 + a_1 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i}(u^{p-1}X_0)^i a_0^{p-i} \quad etc.$$

<u>Lem</u> (a) $R[\underline{X}]$ は

$$d(X_i) = \frac{S_i(\underline{X}, \underline{u}) - X_i}{u}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

で定まる $u$-derivation $d$ をもつ. ここで $\underline{u} = (u, u^p, \cdots, u^{p^{n-1}})$ とし, $R = \mathbb{Z}[u]$ 又は $\mathbb{F}_p[u]$ ($u$ 不定元) と思って計算する.

(b) $d^{p^n} = 0$.

(c) この $d$ は, $\forall \underline{a} \in W_n(R)$ に対し, $S_{\underline{a}}$ の $u$-derivation を引起す.

(d) $(S_{\underline{a}}, d)$ の類は $Gal_u(R, p^n)$ に属する.

たとえば $d(X_0) = 1$, $d(X_1) = u^{p-1} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} u^{i-1} X_0^{p-i}$.

<u>Thm</u> (A-S-W の deformation) [7]. $R$ が標数 $p$ のとき $\underline{a} \in W_n(R)$ に対し, $\pi(\underline{a}) = [S_{\underline{a}}, d] \in Gal_u(R, p^n)$ とおくと次の完全列が成立つ:

$$W_n(R) \xrightarrow{F - u^{p-1}} W_n(R) \xrightarrow{\pi} Gal_u(R, p^n) \to 0.$$

本来の A-S-W 列は $R$-group scheme の完全列

$$0 \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_R \to W_{n_R} \xrightarrow{F - I} W_{n_R} \to 0$$

に，あるコホモロジー的手続きを施すことにより得られる．deform された上の完全列についても同様の事情が成立する．

ホップ代数 $H_u = R[X, \mathfrak{g}_u(X)^{-1}]$ に対し，

$$H(u, p^n) = R[X]/(X^{p^n})$$

はその quotient Hopf algebra（$n$ 回 iterated $u$-Frobenius map $H_{u^{p^n}} \longrightarrow H_u$ の Hopf-cokernel）である．$H(1, p^n)$ は $R[\mathbb{Z}/(p^n)]$ と同形だから

$$Sp_R\, H(1, p^n)^* \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_R .$$

定義からすぐ分るように

$$Gal_u(R, p^n) = Gal(R, Sp_R\, H(u, p^n)^*)$$

と同一視される．($H(u, p^n)^*$ は dual Hopf algebra を表わす)．

<u>Thm</u>　標数 $p$ の可換環 $R$ 上で group scheme の exact 列

$$0 \longrightarrow Sp_R\, H(u, p^n)^* \longrightarrow W_{n_R} \xrightarrow{F - u^{p-1}} W_{n_R} \longrightarrow 0$$

が存在する [7].

このexact列に，通常のA-S-W列を得る場合と同じ手続きを施せば，我々のA-S-Wのdeformationがえられる．所で$Sp_R\, H(u, p^n)^*$はu-Frobenius map

$$G_u \xrightarrow{p^n} G_{u^{p^n}}$$

のkernel ${}_{p^n}G_u$ のCartier dual $({}_{p^n}G_u)^D$ であるから，このexact列は

$$({}_{p^n}G_u)^D \cong {}_{F-u^n}W_n \qquad (\maltese)$$

と読みとれる．$u=0$のときこれは$({}_{p^n}G_a)^D \cong {}_FW_n$となり，これはArtin-Hasseのduality

$$({}_{F^n}W_m)^D \cong {}_{F^m}W_n \quad [1, V, \S 4, 4.7]$$

のspecial case ($m=1$) に他ならない．とすれば($\maltese$)はもっと一般のあるdualityの特別な場合であるかもしれない．

ここに述べたu-calculusをとくに標数$p$の$u=0$と標数0の$u=1$の間のdeformationと捉え代数幾何に応用する事については，関口氏による次項の報告を参照されたい．

## 文献


[1] Demazure-Gabriel, Groupes algébriques, North-Holland, 197

[2] Kreimer-Takeuchi, Hopf algebras and Galois extensions of an algebra, Indiana U. Math. J. 30 (1981) 675-692.

[3] Doi-Takeuchi, Cleft comodule algebras for a bialgebra, Com. Alg. 14 (1986), 801-818.

[4] Passman, Algebraic crossed products, Contemp. Math. 43 (1985) 209-225.

[5] Serre, Corps locaux, Hermann, 1968.

[6] Nakajima, A certain type of commutative Hopf Galois extensions and their groups, Math. J. Okayama U. 24 (1982), 137-152.

[7] 竹内, Artin-Schreier-Witt 理論のdeformation, 「数学」寄稿 (to appear).